

УДК517.984.50

# РЯДЫ ФУРЬЕ ОПЕРАТОРА РОТОР И ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Р.С. Сакс

Аннотация. В работе описаны свойства операторов ротор и градиент дивергенции в области  $G$  трехмерного пространства. Обсуждается самосопряженность этих операторов в подпространствах  $\mathbf{L}_2(G)$  и базисность системы собственных функций. Выписаны явные формулы для решения краевых задач в шаре и условия разложимости вектор-функций в ряды Фурье по собственным функциям ротора и градиента дивергенции.

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**1.1. Основные пространства.** В статье мы рассматриваем линейные пространства над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Через  $\mathbf{L}_2(G)$  обозначаем пространство Лебега вектор-функций, квадратично интегрируемых в  $G$  с внутренним произведением  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_G \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x}$  и нормой  $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$ . Пространство Соболева порядка  $s \geq 0$  обозначается через  $\mathbf{H}^s(G)$ ,  $\|\mathbf{f}\|_s$  -норма его элемента  $\mathbf{f}$ ; замыкание в  $\mathbf{H}^s(G)$  пространства  $C_0^\infty(G)$  обозначается через  $\mathbf{H}_0^s(G)$ . Пространство Соболева отрицательного порядка  $\mathbf{H}^{-s}(G)$  двойственно к  $\mathbf{H}_0^s(G)$  (см. пространство  $W_p^{(l)}(\Omega)$  при  $p = 2$  в §3 гл. 4 [1],  $H^k(Q)$  в §4 гл. 3 [10], а также гл.1 в [16]).

В области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma$  в каждой точке  $y \in \Gamma$  определена нормаль  $\mathbf{n}(y)$  к  $\Gamma$ . Вектор-функция  $\mathbf{u}$  из  $\mathbf{H}^{s+1}(G)$  имеет след  $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$  на  $\Gamma$  ее нормальной компоненты, который принадлежит пространству Соболева-Слободетцкого  $\mathbf{H}^{s+1/2}(G)$ ,  $|\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2}$  - его норма.

Пусть функция  $h \in H^1(G)$ , а  $\mathbf{u} = \nabla h$  - ее градиент. Через  $\mathcal{A}(G)$  обозначим подпространство  $\{\nabla h, h \in H^1(G)\}$  в  $\mathbf{L}_2(G)$ , а через  $\mathcal{B}(G)$  - его ортогональное дополнение. Так что

$$(1) \quad \mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G).^1$$

<sup>1</sup>Это разложение я взял из статьи Z.Yoshida и Y.Giga [26]. Они называют его разложением Вейля (H.Weyl [6]), а пространство  $\mathcal{B}(G)$  обозначают как  $L_\sigma^2(G)$ . В обобщенном смысле оно формулируется так:

$$L_\sigma^2(G) = \{u \in L^2(G), \operatorname{div} u = 0, \gamma(\mathbf{n} \cdot u) = 0\}.$$

Отметим, что в разложении Вейля [6], Теорема II, роль  $\mathcal{A}$  играет пространство  $\mathfrak{G}$ -замыкание в норме  $L_2$  градиентов функций  $\psi \in \Gamma = \mathcal{C}_0^1(G)$ . С.Л.Соболев [2] приводит разложение  $\mathbf{L}_2(\Omega)$  в двух случаях, когда  $\Omega$  совпадает со всем пространством и случай ограниченной области  $\Omega$ , гомеоморфной шару. Множества вектор-функций вида  $\{\nabla \varphi\}$  при  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  и  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , называемых потенциальными, обозначаются как  $\tilde{G}_0$  и  $\tilde{G}_1$ , а множества вектор-функций вида  $\{\text{rot } \psi\}$  при  $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  и  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , называемых соленоидальными, обозначаются как  $\tilde{J}_0$  и  $\tilde{J}_1$ , соответственно.  $G_0, G_1$  и  $J_0, J_1$  - их замыкания в норме  $H = L_2(\Omega)$ . Автор доказывает, что первом случае  $H = G \oplus J$ , где  $G = G_0 = G_1$ ,  $J = J_0 = J_1$ , а во втором:  $H = G_0 \oplus I \oplus J_0$ , где  $I = G_1 \cap J_1$ .

О.А.Ладыженская в §2 гл.1 книги [4] приводит разложение пространства  $\mathbf{L}_2(\Omega)$  на два ортогональных подпространства  $\mathbf{G}(\Omega)$  и  $\mathbf{J}^\circ(\Omega)$ , где  $\mathbf{J}^\circ(\Omega)$  есть замыкание в норме  $\mathbf{L}_2(\Omega)$  множества  $\dot{\mathbf{J}}(\Omega)$  бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  соленоидальных векторов, а  $\mathbf{G}(\Omega)$  его ортогональное дополнение в  $\mathbf{L}_2(\Omega)$ . Она пишет: "имеются разные способы определения этих пространств (см. прежде всего работу Вейля [6], а также [12] и [13])". Э.Быховский и Н.Смирнов [13] отмечают: "К.Фридрихс [8] доказал близкие результаты для дифференциальных форм на римановых многообразиях".

Мы будем придерживаться разложения (1).

Если граница области  $G$  имеет положительный род  $\rho$ , то  $\mathcal{B}$  содержит в себе конечномерное подпространство

$$(2) \quad \mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \text{rot } \mathbf{u} = 0, \text{ div } \mathbf{u} = 0, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0\}.$$

Его размерность равна  $\rho$  [30], а базисные функции  $h_j \in \mathcal{C}^\infty(G)$ . Гладкость обобщенных решений системы (2) доказали С.Соболев [3] и Г.Вейль [6]. Ортогональное дополнение  $\mathcal{B}_H$  в  $\mathcal{B}(G)$ , следуя А.Фурсикову [19], обозначим через  $\mathbf{V}^0(G)$ . Значит,

$$(3) \quad \mathcal{B}(G) = \mathbf{V}^0(G) \oplus \mathcal{B}_H(G).^2$$

Индексом  $\gamma$  будем снабжать пространства вектор-функций  $\mathbf{u}$ , нормальные компоненты которых имеют на  $\Gamma$  нулевой след  $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ :

$$(4) \quad \mathcal{A}_\gamma = \{\nabla h, h \in H^1(G), \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla h) = 0\},$$

$$\mathbf{H}_\gamma^{s+1}(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(G) : \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0\}.$$

---

<sup>2</sup>В [26]:  $L_\sigma^2(G) = L_\Sigma^2(G) \oplus L_H^2(G)$ . Символ  $L$  перегружен. Мы изменили авторские обозначения пространств  $L_\Sigma^2(G)$  и  $L_H^2(G)$  на  $\mathbf{V}^0(G)$  и  $\mathcal{B}_H(G)$ .

### 1.2. Свойства операторов ротор и градиент дивергенции.

Операторы градиент, ротор и дивергенция определяются в трехмерном векторном анализе [11]. Им соответствует оператор  $d$  внешнего дифференцирования на формах  $\omega^k$  степени  $k = 0, 1$  и  $2$ . Соотношения  $dd\omega^k = 0$  при  $k = 0, 1$  имеют вид  $\text{rot } \nabla h = 0$  и  $\text{div rot } \mathbf{u} = 0$ .

Формулы  $\mathbf{u} \cdot \nabla h + h \text{div } \mathbf{u} = \text{div}(h \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \text{div}[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ , где  $[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$  - векторное произведение, и интегрирование по области  $G$  используются при определении операторов  $\text{div } \mathbf{u}$  и  $\text{rot } \mathbf{u}$  в  $\mathbf{L}_2(G)$ .

Оператор Лапласа выражается через  $\text{rot rot}$  и  $\nabla \text{div}$ :

$$(5) \quad -\Delta \mathbf{v} = \text{rot rot } \mathbf{v} - \nabla \text{div } \mathbf{v}.$$

Оператор Лапласа эллиптичен, а операторы  $\text{rot}$  и  $\nabla \text{div}$  не являются таковыми [15]. Они вырождены, причем  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  при  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}(G)$ ,  $\nabla \text{div } \mathbf{v} = 0$  при  $\mathbf{v} \in \mathcal{B}(G)$  в смысле теории распределений.

Операторы  $\text{rot} + \lambda I$  на  $\mathcal{A}(G)$  и  $\nabla \text{div} + \lambda I$  на  $\mathcal{B}(G)$  сводятся к умножению на  $\lambda \neq 0$ , а на ортогональных подпространствах при обращении требуют краевых условий; например,  $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0$ . Они принадлежат классу Б.Вайберга и В.Грушина [14] операторов, приводимых к эллиптическим, так как их расширения являются эллиптическими переопределенными операторами. Краевые задачи с условием  $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = g$  являются эллиптическими по Солонникову [15]. В пространствах  $\mathbf{V}^0(G)$  и  $\mathcal{A}_\gamma(G)$  операторы ротор и градиент дивергенции допускают самосопряженные расширения.

А именно, оператор  $S : \mathbf{V}^0(G) \rightarrow \mathbf{V}^0(G)$  с областью определения  $\mathbf{W}^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}$ , совпадающий с  $\text{rot } \mathbf{u}$  при  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1$ , является самосопряженным и имеет вполне непрерывный обратный  $S^{-1}$  из  $\mathbf{V}^0$  в  $\mathbf{W}^1$  [26].

Соответственно, оператор  $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma(G) \rightarrow \mathcal{A}_\gamma(G)$ , совпадающий с  $\nabla \text{div } \mathbf{u}$  на  $\mathcal{A}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma(G) : \nabla \text{div } \mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\}$ , самосопряжен и его обратный оператор  $\mathcal{N}_d^{-1} : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}^2$  вполне непрерывен (п.4.3).

Следовательно, каждый из этих операторов имеет полную систему собственных функций, отвечающих ненулевым собственным значениям:

$$\text{curl } \mathbf{u}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{u}_j^\pm, \quad \lambda_j \in \Lambda \subset \mathbb{R}, \quad \nabla \text{div } \mathbf{q}_j = \mu_j \mathbf{q}_j, \quad \mu_j \in M \subset \mathbb{R},$$

$$(6) \quad \mathbf{a}(x) = \sum_{\mu_j \in M} (\mathbf{a}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(x), \quad \text{если } \mathbf{a}(x) \in \mathcal{A}_\gamma(G), \quad \|\mathbf{q}_j\| = 1,$$

$$\mathbf{b}(x) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(\mathbf{b}, \mathbf{u}_j^+) \mathbf{u}_j^+(x) + (\mathbf{b}, \mathbf{u}_j^-) \mathbf{u}_j^-(x)], \quad \mathbf{b}(x) \in \mathbf{V}^0(G), \quad \|\mathbf{u}_j^\pm\| = 1.$$

В шаре  $B$  радиуса  $R$  собственные функции  $\mathbf{u}_\kappa^\pm$  ротора, отвечающие ненулевым собственным значениям  $\pm\lambda_\kappa = \pm\rho_{n,m}/R$  и собственные функции  $\mathbf{q}_\kappa$  градиента дивергенции с собственными значениями  $\nu_\kappa^2$ ,  $\nu_\kappa = \alpha_{n,m}/R$ , выражаются явными формулами (см. пп. 3.2 и 5.3) и

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_\kappa^\pm = \pm\lambda_\kappa \mathbf{u}_\kappa^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_\kappa^\pm = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{q}_\kappa = 0 \quad \kappa = (n, m, k),$$

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\kappa^\pm = 0, \quad \nabla \operatorname{div} \mathbf{q}_\kappa = \nu_\kappa^2 \mathbf{q}_\kappa, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\kappa = 0, \quad |k| \leq n,$$

где числа  $\pm\rho_{n,m}$  и  $\alpha_{n,m}$  - нули функций  $\psi_n$  и их производных  $\psi'_n$ , а

$$(7) \quad \psi_n(z) = (-z)^n \left( \frac{d}{zdz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad n \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Собственные функции каждого из операторов взаимно ортогональны и их совокупная система полна в  $\mathbf{L}_2(B)$  [42].

Найдены необходимые и достаточные условия на вектор-функции  $\mathbf{u}$  из  $\mathbf{V}^0(B)$  и  $\mathbf{v}$  из  $\mathcal{A}_\gamma(B)$ , при которых их ряды Фурье сходятся в норме пространства Соболева  $\mathbf{H}^s(B)$  порядка  $s > 0$ . Они состоят в принадлежности  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  пространствам  $\mathbf{V}_\mathcal{R}^s(B)$  п. 3.3 и  $\mathcal{A}_\mathcal{K}^s(B)$  п. 5.7.

Предлагается единый подход к изучению краевых задач (9), (11) в пространствах  $\mathbf{H}^s(G)$ ,  $s \geq 1$ , при  $\lambda \neq 0$ . Их разрешимость зависит от пространств, к которым принадлежат  $\mathbf{f}$  и  $g$  (пп. 2.3 и 4.3).

**1.3. Спектральная задача.** Пусть  $G$  - ограниченная область в  $R^3$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к  $\Gamma$ . В частности,  $G$  может быть шаром  $B$ ,  $|x| < R$ , с границей  $S$ .

**Задача 1.** Найти все собственные значения  $\lambda$  и собственные вектор-функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в  $\mathbf{L}_2(G)$  оператора ротор такие, что

$$(8) \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad \text{в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0,$$

где  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  - скалярное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{n}$ .

К области определения  $\mathcal{M}_\mathcal{R}$  оператора  $\mathcal{R}$  задачи 1 отнесем все вектор-функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  класса  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ , удовлетворяющие граничному условию и такие, что  $\operatorname{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$ . Пространство основных вектор-функций  $\mathcal{D}(G)$  содержится в  $\mathcal{M}_\mathcal{R}$  и плотно в  $\mathbf{L}_2(G)$  [7].

**1.4. О приложениях.** Собственные функции задачи 1 имеют приложения в гидродинамике, где они называются полями Бельтрами; в астрофизике и в физике плазмы они называются бессильными полями (force-free magnetic fields - С. Чандрасекхар и П.Кендал [23], free-decay fields - Д. Тэйлор [22]). В теоремах В.И.Арнольда [17] 1965, и В.В.Козлова, 1983, (см. [9]) изучавших топологию линий тока течений идеальной жидкости, имеется условие  $[\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{v}] \neq 0$ .

Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости со скоростью  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , удовлетворяющей уравнению  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  (в классе периодических функций) изучал М. Энон [18]. Ссылаясь на его вычисления, В. Арнольд пишет, что такие течения "могут иметь линии тока с весьма сложной топологией, характерной для задач небесной механики".

Самосопряженные расширения оператора ротор и его свойства изучали П.Е.Берхин [25] 1975, З. Йошида и И. Гига [26] 1990 а также Р. Пикар [27] 1996, и Н.Филонов [28].

Д. Кантарелла и Де Турк, Г.Глюк и М.Тэйтель 2000 [29] исследовали топологию линий тока собственных функций ротора с минимальным собственным значением в шаре и в шаровом слое.

С.Чандрасекхара и П.Кендала [23] 1957, заметили, что собственные функции ротора можно выразить через решения уравнения Гельмгольца. В цилиндре (с условием периодичности вдоль оси), эта идея была реализована в работе Д. Монтоммери, Л.Тернера и Г.Вахалы о магнито-гидродинамической турбулентности [24] 1978. Они отмечают: "три интегральных инварианта (полная энергия, магнитная и крос спиральность) имеют простые квадратичные выражения в терминах коэффициентов разложения в ряды Фурье".

Другие приложения собственных функций и рядов Фурье оператора ротор имеются в работах автора. В частности, найдена связь между собственными функциями операторов ротора и Стокса, построены явные решения нелинейных уравнений Навье-Стокса, разработан метод численного решения задачи Коши для уравнений Навье-Стокса [37]–[42].<sup>3</sup>

**1.5. Структура работы и основные результаты.** В § 2 в ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma$  исследована краевая задача

$$(9) \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma} = g$$

для оператора ротор в пространствах  $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ , число  $s + 1 \geq 1$  целое. Определяется ее оператор  $\mathbb{A}$  (см.(19)).

Доказано, что при  $\lambda \neq 0$  эта задача является обобщенно эллиптической: она приводится к переопределенной эллиптической задаче по определению Солонникова [15]. Из его Теоремы 1.1 вытекает

---

<sup>3</sup>В 2003 году О.А. Ладыженская решала задачу "О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей" [5] и искала способы вычисления собственных функций оператора Стокса в областях простейших форм в явном виде. Автору удалось найти их в случае периодических граничных условий и в шаре [37],[41].

Теорема 1 и, в частности, конечномерность ядра оператора  $\mathbb{A}$  задачи в пространстве Соболева  $\mathbf{H}^{s+1}(G)$  и априорная оценка:

$$(10) \quad C_s \|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_s + |\lambda| \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s.$$

В п.2.3 мы изучаем оператор  $\operatorname{rot} + \lambda \mathbf{I}$  в ортогональных подпространствах в  $\mathbf{L}_2(G)$ . На  $\mathcal{A}$  и  $B_H$  он сводится к  $\lambda \mathbf{u}$ . На  $\mathbf{V}^0(G)$  он продолжается как самосопряженный оператор  $S + \lambda I$ . Выписаны необходимые и достаточные условия его обратимости (Теорема 2).

В § 3 указывается способ решения спектральной задачи 1 в шаре. При  $\lambda \neq 0$  задача сводится к спектральной задаче Дирихле для скалярного оператора Лапласа с условием  $v(0) = 0$  в центре шара. Она решается явно [7], это позволяет определить радиальные компоненты собственных вектор-функций и числа  $\lambda_\kappa^2 > 0$ . Две другие компоненты определяются из уравнений  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_\kappa = \pm \lambda_\kappa \mathbf{u}_\kappa$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u}_\kappa = 0$ . Ее решение опубликовано [42], в п.3.2 мы приводим уравнения для ненулевых собственных значений и формулы собственных функций.

В.П.Михайлов [10] выделил подпространства  $H_{\mathcal{D}}^s(G)$  и  $H_{\mathcal{N}}^s(G)$  в пространстве Соболева  $H^s(G)$  и доказал, что условие принадлежности  $f$  к  $H_{\mathcal{D}}^s(G)$  (соотв., к  $H_{\mathcal{N}}^s(G)$ ) необходимо и достаточно для сходимости ее ряда Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа с условием Дирихле (Неймана) в норме  $H^s(G)$ .

Мы приводим в п.3.3 аналогичный результат для оператора ротор (Теорема 3), а п.5.6 – для градиента дивергенции.

В § 4 исследована краевая задача

$$(11) \quad \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g$$

в ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma$ . Доказано, что эта задача обобщенно эллиптична при  $\lambda \neq 0$ : она приводится к эллиптической задаче [15]. Откуда вытекает Теорема 4, конечно-мерность ядра оператора  $\mathbb{B}$  задачи в пространстве Соболева  $\mathbf{H}^{s+2}(G)$  и априорная оценка:

$$(12) \quad C_s \|\mathbf{u}\|_{s+2} \leq |\lambda| \|\operatorname{rot}^2 \mathbf{u}\|_s + \|\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+3/2} + \|\mathbf{u}\|_s.$$

В п.4.3 мы изучаем оператор  $\nabla \operatorname{div} + \lambda \mathbf{I}$  в ортогональных подпространствах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  в  $\mathbf{L}_2(G)$ . На  $\mathcal{B}$  оператор  $\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$  сводится к  $\lambda \mathbf{u}$ . На  $\mathcal{A}_\gamma$  он продолжается как самосопряженный оператор  $\mathcal{N}_d + \lambda I$ . Найдены необходимые и достаточные условия его обратимости (Теорема 5b).

В § 5 спектральная задача для оператора градиент дивергенции в области с гладкой границей сводится к решению спектральной задачи Неймана для скалярного оператора Лапласа.

В шаре ее решения вычислены явно [7]. В результате мы получаем формулы (77) собственных функций  $\mathbf{q}_\mu(\mathbf{x})$  градиента дивергенции.

В §6 мы рассматриваем совокупную систему собственных функций ротора и градиента дивергенции:  $\{\mathbf{q}_i(\mathbf{x}), \mathbf{h}_j(\mathbf{x}), \mathbf{q}_k^+(\mathbf{x}), \mathbf{q}_k^-(\mathbf{x})\}$   
4

$\mu_i \in M, j \in [1, \rho], \lambda_k \in \Lambda$ , они взаимно ортогональны и образует в  $L_2(G)$  ортонормированный базис.

В шаре  $B$  векторное поле  $\mathbf{f} \in L_2(B)$  разлагается на потенциальное и соленоидальное поле  $\mathbf{a}_f$  и  $\mathbf{b}_f$ :  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_f(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_f(\mathbf{x})$ .

В качестве примера в §7 методом Фурье решена краевая задача (13) в шаре при любых  $\lambda$  и  $g = 0$  (Теорема 8).

## 2. ОПЕРАТОР РОТОР В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

**2.1. Краевая задача:** в ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma$  заданы векторная и скалярная функции  $\mathbf{f}$  и  $g$ , найти вектор-функцию  $\mathbf{u}$ , такую что

$$(13) \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g.$$

Эта задача не эллиптическая. Оператор  $\operatorname{rot} + \lambda I$  первого порядка не является эллиптическим, так как ранг его символической матрицы  $\operatorname{rot}(i\xi)$ , равный двум при всех  $\xi \in \mathcal{R}^3 \setminus 0$ , меньше трех [33].

Б.Вайнберг и В.Грушин [14] 1967 определили на гладком многообразии  $X$  без края класс *равномерно неэллиптических систем* (РНС) сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и класс матричных с.и.д. операторов, *глобально приводимых к эллиптическим матрицам*, и доказали их эквивалентность. Эти определения требуют введения дополнительных понятий.

Мы приведем их для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, который обозначим как (РНСр)

Система дифференциальных уравнений,  $S(D)u = f$  порядка  $m$ , из этого класса обладает свойствами:

а) ее символическая матрица  $S_0(i\xi)$  имеет постоянный ранг при всех  $\xi \in \mathcal{R}^3 \setminus 0$ .

Это позволяет построить аннулятор  $C(D)$  оператора  $S_0(D)$  такой, что  $(CS_0)(D) \equiv 0$  на  $X$  и определить

б) расширенную систему  $Su = f, // CSu = Cf$  порядка  $m$ .

Ее символическая матрица  $S_0(i\xi), //(CS)_0(i\xi)$  определяется младшей частью оператора  $S(D)$  и дополняет матрицу  $S_0(i\xi)$ .

---

<sup>4</sup>Вектор-функции  $\mathbf{q}_i(\mathbf{x})$  удовлетворяют также уравнениям  $\operatorname{rot} \mathbf{q}_i = \mathbf{0}$ , а  $\mathbf{q}_k^\pm(\mathbf{x})$  - уравнениям  $\nabla \operatorname{div} \mathbf{q}_k^\pm(\mathbf{x}) = 0$ .

в) Если ранг расширенной матрицы максимален, то исходная система  $Su = f$  принадлежит классу (PHC1) и степень ее приводимости равна единице.

г) Если система  $Su = f$  такова, что ранг расширенной матрицы не максимален, но постоянный, то процесс повторяется и при определенных условиях система принадлежит классу (PHC2). И так далее.

Авторы [14] доказали, что система  $Su = f$  класса (PHCp) являются разрешимой по Фредгольму или Нетеру в пространствах Соболева  $\mathbf{H}^s(X)$ , если  $f \in \mathbf{H}^{s-m+p}(X)$ , где  $s \geq m$  целое. В качестве примера оператора из класса (PHC1) они приводят оператор  $d + *$  на дифференциальных формах степени  $k$  в  $2k + 1$ -мерном многообразии  $X$ .<sup>5</sup>

Покажем, что дифференциальный оператор  $(\text{rot} + \lambda I)$  при  $\lambda \neq 0$  принадлежит классу (PHC1) в любой области  $X \subset \mathbf{E}^3$ . Действительно,

а) его символическая матрица  $\text{rot}(i\xi)$  не зависит от  $x$  и ее ранг равен двум при всех  $\xi \in \mathcal{R}^3 \setminus 0$ .

б) оператор  $\text{rot}$  имеет левый аннулятор  $\text{div} : \text{div rot } \mathbf{u} = 0$  на  $X$ .

в) ранг символической  $(4 \times 3)$ -матрицы  $[\text{rot}(i\xi)/\lambda \text{div}(i\xi)]$  равен трем при всех  $\xi \in \mathcal{R}^3 \setminus 0$ . Следовательно расширенная система

$$(14) \quad \text{rot } \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \lambda \text{div } \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{f},$$

является эллиптической системой первого порядка, а система (13) принадлежит классу (PHC1).

Далее, система (14) с произвольной функцией  $f_4$  вместо  $\text{div } \mathbf{f}$  и с краевым условием  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = g$  составляют переопределенную эллиптическую краевую задачу по Солонникову [15]. А именно,

1) система (14) эллиптична,

2) оператор краевого условия  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  "накрывает" оператор системы.

Первое условие сводится к тому, что однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$(15) \quad \text{rot}(i\xi) \mathbf{w} = 0, \quad \lambda \text{div}(i\xi) \mathbf{w} = 0, \quad \forall \xi \neq 0$$

с параметром  $\xi \in \mathcal{R}^3$  имеет только тривиальное решение  $\mathbf{w} = 0$ .

Второе условие означает, что однородная система линейных дифференциальных уравнений:

$$(16) \quad \text{rot}(i\tau + \mathbf{n}d/dz) \mathbf{v} = 0, \quad \text{div}(i\tau + \mathbf{n}d/dz) \mathbf{v} = 0, \quad \forall \tau \neq 0,$$

---

<sup>5</sup>Другие классы обобщенно эллиптических операторов см. в работе [34].



на полуоси  $z \geq 0$  с краевым условием:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{z=0} = 0$  и убыванием,  $\mathbf{v}(y, \tau; z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +\infty$ , имеет только тривиальное решение.

Здесь  $\tau$  и  $\mathbf{n}$  – касательный и нормальный векторы к  $\Gamma$  в точке  $y \in \Gamma$  и  $|\mathbf{n}| = 1$ .<sup>6</sup>

При доказательстве утверждений 1), 2) воспользуемся соотношением

$$(17) \quad \text{rot rot } \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v} + \nabla \text{div } \mathbf{v}.$$

Тогда 1<sup>0</sup>). Из уравнений (15) вытекает уравнение  $-\Delta(i\xi)\mathbf{w} = 0$ . Оно распадается на три скалярных уравнения  $|\xi|^2 w_j = 0$ . Значит,  $\mathbf{w} = 0$  при  $|\xi| \neq 0$ . Эллиптичность системы (14) доказана.

2<sup>0</sup>). Из уравнений (16) получаем уравнение  $(-|\tau|^2 + (d/dz)^2)\mathbf{v} = 0$  с параметром  $|\tau| > 0$ . Его убывающее при  $z \rightarrow +\infty$  решение имеет вид:  $\mathbf{v} = \mathbf{w}e^{-|\tau|z}$ . Оно удовлетворяет уравнениям (16), если вектор-функция  $\mathbf{w}$  такова, что  $\omega \times \mathbf{w} = 0$ ,  $\omega' \cdot \mathbf{w} = 0$ , где  $\omega \equiv i\tau - |\tau|\mathbf{n}$  – вектор-столбец,  $\omega'$  – вектор-строка, а  $\omega' \cdot \omega$  – их произведение.

Легко убедиться, что векторное и скалярное произведения  $\omega$  на  $\omega$  равны нулю:  $\omega \times \omega = 0$ ,  $\omega' \cdot \omega = 0$ . Ранг матрицы  $\text{rot}(i\xi)$  равен двум при  $\xi \neq 0$ , поэтому  $\mathbf{w} = c\omega$ , где  $c$  – постоянная, и других решений нет. Граничное условие приводит нас к уравнению:  $|\tau|c = 0$ . Значит  $c = 0$  при  $|\tau| > 0$  и, следовательно,  $\mathbf{v} = 0$ .

Итак, система (14) с краевым условием  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma} = g$  при  $\lambda \neq 0$  является эллиптической задачей.

Мы скажем в этом случае, что задача (13) при  $\lambda \neq 0$  является обобщенно эллиптической.

**2.2. Оператор задачи в пространствах Соболева.** Пусть вектор-функция  $\mathbf{u}$  принадлежит пространству Соболева  $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ , где  $s \geq 0$  – целое. Тогда компоненты  $\text{rot } \mathbf{u}$  и  $\text{div } \mathbf{u}$  принадлежат  $H^s(G)$ , а вектор-функция  $\mathbf{f} := \text{rot } \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$  принадлежит пространству

$$(18) \quad \mathbf{E}^s(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G) : \text{div } \mathbf{f} \in H^s(G)\},$$

которое снабжается нормой  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|_s^2 + \|\text{div } \mathbf{v}\|_s^2)^{1/2}$ .

Далее  $g := \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma}$  принадлежит пространству Соболева-Слободетского  $H^{s+1/2}(\Gamma)$ .

Следовательно, при  $\lambda \neq 0$  задаче соответствует ограниченный оператор

$$(19) \quad \mathbb{A}\mathbf{u} \equiv \begin{matrix} \text{rot } \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} \\ \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \end{matrix} : \mathbf{H}^{s+1}(G) \rightarrow \begin{matrix} \mathbf{E}^s(G) \\ H^{s+1/2}(\Gamma) \end{matrix}.$$

<sup>6</sup> Главные части системы в [15] определяются с помощью весов  $s_k$  и  $t_j$  таких, что  $\text{ord } L_{k,j} \leq s_k + t_j$ . Положив  $s_k = 0$  при  $k = 1-4$  и  $t_j = 1$  при  $j = 1-3$  мы получим операторы системы (15), а в краевом операторе –  $\sigma_1 = -1$ .

Согласно Теореме 1.1 из работы Солонникова [15] о переопределенных эллиптических краевых задачах в ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma \in C^{s+1}$ , обобщенно эллиптический оператор (19) имеет левый регуляризатор: то-есть ограниченный оператор  $\mathbb{A}^L$  такой, что  $\mathbb{A}^L \mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{T}$ , где  $\mathbb{I}$  - единичный, а  $\mathbb{T}$  - вполне непрерывный операторы, и существует постоянная  $C_s > 0$  такая, что выполняется априорная оценка:

$$(20) \quad C_s \|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_s + |\lambda| \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s.$$

Оценка (20) известна (см. например [20, 26]). Мы показали, что она получается из работы В.А.Солонникова [15].<sup>7</sup>

Линейное пространство решений однородной задачи обозначим через  $\mathcal{N}$ . Итак, имеет место

**Теорема 1.** *Оператор  $\mathbb{A}$  в пространствах (19) имеет левый регуляризатор. Его ядро  $\mathcal{N}$  конечномерно и выполняется оценка (20).*

Из этой теоремы и оценки следует, что при  $\lambda \neq 0$

- а) число линейно независимых решений задачи 1 конечно,
- б) любое (обобщенное) решение задачи бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.

**2.3. Оператор  $\operatorname{rot} + \lambda \mathbf{I}$  в подпространствах  $\mathbf{L}_2(G)$ .** На подпространстве  $\mathcal{A}$  оператор  $\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$  сводится к  $\lambda \mathbf{u}$ .

Ортогональное дополнение  $\mathcal{B}$  к  $\mathcal{A}$  в  $\mathbf{L}_2(G)$  определяется так

$$(21) \quad \mathcal{B} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \int_G \mathbf{u} \cdot \nabla h \, dx = 0, \quad \text{для любой } h \in H^1(G)\}.$$

Для функций  $\mathbf{u}$  из  $\mathbf{H}^1(G)$  получаем:  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  в  $G$  и  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0$ .

В пространстве  $\mathcal{B}$  выделяется подпространство

$$(22) \quad \mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathcal{B} : \int_G \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \text{для любой } \mathbf{v} \in \mathcal{D}(G)\}.$$

Пространства  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_H$  в обобщенном смысле обозначают так:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\},$$

$$(23) \quad \mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\}.$$

---

<sup>7</sup>Он приводит оценку в банаховых пространствах Соболева  $W_p^{l+t_j}(G)$ ,  $l \geq 0, p > 1$ , которые при  $l = s, p = 2, t_j = 1$  совпадают  $H^{s+1}(G)$ , и доказывает, что эта оценка является точной.

Ввиду оценки (20) базис  $\mathcal{B}_H$  состоит из бесконечно дифференцируемых в  $G$  вектор-функций  $\{\mathbf{h}_j\}_{j \in \overline{1, \rho}}$ , где  $\rho$  есть род границы  $G$  [30].

Ортогональное дополнение к  $\mathcal{B}_H$  в  $\mathcal{B}$  обозначим как  $\mathbf{V}^0(G)$ , причем  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^0} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2}$ . Так, что

$$(24) \quad \mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_H \oplus \mathbf{V}^0(G).$$

В случае шара  $\mathcal{B} = \mathbf{V}^0(G)$ . В полнотории  $\dim \mathcal{B}_H = 1$ .

Наконец, в  $\mathbf{V}^0(G)$  выделяется подпространство

$$(25) \quad \mathbf{W}^1(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}.$$

В силу оценки (20) оно содержится в  $\mathbf{H}^1(G)$  и плотно в  $\mathbf{V}^0(G)$ , так как плотное в нем множество  $\mathbf{C}_0^\infty \cap \mathbf{V}^0(G)$  содержится в  $\mathbf{W}^1(G)$ .

З. Иошида и И. Гига [26] определили в гильбертовом пространстве  $\mathbf{V}^0(G)$  оператор  $S : \mathbf{V}^0(G) \rightarrow \mathbf{V}^0(G)$ , который совпадает с  $\operatorname{rot} \mathbf{u}$  при  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1(G)$ , и доказали, что

*Оператор  $S$  является самосопряженным и имеет вполне непрерывный обратный оператор  $S^{-1}$  из  $\mathbf{V}^0(G)$  в  $\mathbf{W}^1(G)$ . Спектр  $\sigma(S^{-1})$  точечный и действительный и не содержит точек накопления кроме нуля. Семейство собственных функций оператора  $S$  образует ортогональный базис в пространстве  $\mathbf{V}^0(G)$ .*

Собственные функции оператора  $S$  принадлежат пространствам  $\mathbf{W}^1(G)$  и  $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ . Из соотношения

$$(26) \quad (\operatorname{rot} + \lambda I)(\operatorname{rot} - \lambda I)\mathbf{u} = -\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \lambda^2 \mathbf{u}$$

и определения пространства  $V^0(G)$  видим, что собственные функции ротора  $\mathbf{u}_\lambda^\pm$ , отвечающие ненулевым собственным значениям  $\pm \lambda$ , являются также собственными функциями оператора Лапласа:

$$(27) \quad -\Delta \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V^0(G).$$

Нормированные собственные функции ротора обозначим через  $\mathbf{q}_j^\pm$ .

$$S\mathbf{q}_j^\pm = \operatorname{rot} \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{q}_j^\pm \quad \text{при } \lambda_j \in \Lambda \subset R, \quad \lambda_j \leq \lambda_{j+1}, \quad \|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1.$$

Они составляют полный ортонормированный базис в пространстве  $\mathbf{V}^0(G)$ . Спектральное разложение вектор-функции  $\mathbf{f} \in V^0(G)$  по этому базису имеет вид:

$$(28) \quad \mathbf{f} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-], \quad \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G).$$

В случае шара собственные числа ротора суть корни квадратные из собственных чисел оператора Лапласа-Дирихле, а собственные функции ротора вычисляются явно: (40)

Наряду с оператором  $S$  рассмотрим оператор

$$(29) \quad S + \lambda I : \mathbf{V}^0(G) \rightarrow \mathbf{V}^0(G),$$

который на  $\mathbf{W}^1(G)$  совпадает с  $\text{rot} + \lambda I$ .

Оператор  $S + \lambda I$  является самосопряженным, так как

$$(30) \quad \int_G (\text{rot} + \lambda I) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_G \mathbf{u} \cdot (\text{rot} + \lambda I) \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

для любых функций  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  из  $\mathbf{W}^1(G)$ . Это доказано в общем случае в [26], а в случае шара другим способом - в работе автора [42].

Условие обратимости оператора  $S + \lambda I$  совпадает с условием:

$$(31) \quad \int_G \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker}(S + \lambda I).$$

Пусть  $\mathbf{f} \in V^0(G)$ , так как  $(S + \lambda I)\mathbf{f} \in V^0(G)$  то

$$(32) \quad (S + \lambda I)\mathbf{f} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(\lambda + \lambda_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\lambda - \lambda_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]$$

и ряд сходится в  $\mathbf{L}_2(G)$ . Если  $\lambda$  совпадает с одним из собственных значений  $\pm \lambda_{j_0}$ , то соответствующее слагаемое в этом ряду исчезает.

Если элемент  $(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} \in V^0(G)$ , то

$$(33) \quad (S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(\lambda + \lambda_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\lambda - \lambda_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]$$

и ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что  $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) = 0$  при  $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j_0}$ , то-есть функция  $\mathbf{f}$  ортогональна всем собственным функциям  $\mathbf{q}_j^-(\mathbf{x})$  ротора, отвечающим собственному значению  $\lambda_{j_0}$ .

**Теорема 2.** Оператор  $S + \lambda I : \mathbf{V}^0(G) \rightarrow \mathbf{V}^0(G)$  однозначно обратим, если  $\lambda$  не совпадает ни с одним из собственных значений оператора  $S$ , и его обратный задается формулой (33).

Если  $\lambda = \lambda_{j_0}$ , то он обратим тогда и только тогда, когда

$$(34) \quad \int_G \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}_j^- \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{для} \quad \forall \mathbf{q}_j^- : \lambda_j = \lambda_{j_0}.$$

Ядро оператора  $S + \lambda_{j_0} I$  определяется собственными функциями  $\mathbf{q}_j^-(\mathbf{x})$ , собственные значения которых равны  $\lambda_{j_0}$ :

$$(35) \quad \text{Ker}(S + \lambda_{j_0} I) = \sum_{\lambda_j = \lambda_{j_0}} c_j \mathbf{q}_j^-(\mathbf{x}) \quad \text{для} \quad \forall c_j \in \mathcal{R}.$$

Построение собственных функций ротора в заданной области - сложная задача. Один случай выделяется особо.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ РОТОРА В ШАРЕ

Обозначим через  $v(\mathbf{x})$  скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$ . Автор заметил, что внутри шара функция  $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$  удовлетворяет уравнению  $-\Delta v(\mathbf{x}) = \lambda^2 v(\mathbf{x})$ , краевому условию  $v|_S = 0$ , и условию  $v(0) = 0$  в его центре. Тем самым, *Любому решению  $(\lambda, \mathbf{u})$  задачи 1 в шаре  $B$  при  $\lambda \neq 0$  соответствует решение  $(\lambda^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u})$  задачи:*

**Задача 2.** *Найти собственные значения  $\mu$  и собственные функции  $v(x)$  оператора Лапласа  $-\Delta$  в шаре  $B$  такие, что*

$$(36) \quad -\Delta v = \mu v \quad \text{в } B, \quad v|_S = 0, \quad v(0) = 0.$$

Результаты этого параграфа подробно изложены в работе [42]. Здесь мы приведем основные моменты доказательства и формулы ее решений.

#### 3.1. Функции $\psi_n(z)$ .

$$\psi_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(n+1+p+\frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p+\frac{1}{2}}.$$

Как показал Л. Эйлер (см. [7], §23, с. 356) цилиндрические функции  $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$  полуцелого порядка выражаются через элементарные и

$$(37) \quad \psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right).$$

Откуда видно, что нули функций  $\psi_n(z)$  лежат на действительной оси и располагаются на ней симметрично относительно точки  $z = 0$ .

**3.2. Спектральная задача Дирихле для уравнения Лапласа.** В шаре она решена в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  методом разделения переменных (см. [7], §26).

*собственные значения оператора  $\mathcal{L}$  задачи равны  $\lambda_{n,m}^2 = (\rho_{n,m}/R)^2$ , где  $n \geq 0$ ,  $m \in N$ , а числа  $\rho_{n,m} > 0$  - нули функций  $\psi_n(z)$ ,*

*их действительные собственные функции  $v_\kappa$  имеют вид:*

$$(38) \quad v_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\lambda_{n,m} r) Y_n^k(\theta, \varphi),$$

где  $\kappa = (n, m, k)$ - мультииндекс,  $n \geq 0$ ,  $|k| \leq n$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $c_\kappa$ - произвольные постоянные,  $P_n^k(\cos \theta)$  - присоединенные функции Лежандра,  $0 < r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $Y_n^k(\theta, \varphi)$ - сферические функции:

$$(39) \quad Y_n^k(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n^k(\cos \theta) \cos(k\varphi), & \text{если } k = 0, 1, \dots, n; \\ P_n^{|k|}(\cos \theta) \sin(|k|\varphi), & \text{если } k = -1, \dots, -n \end{cases}$$

**3.3. Решение задачи 2.** Так как  $\psi_0(0) = 1$ , функции  $\{v_\kappa\}$  при  $\kappa = (0, m, 0)$  удовлетворяют условию  $v_\kappa(0) = 0$  задачи 2 тогда и только тогда, когда коэффициенты  $c_{(0,m,0)} = 0$ . Откуда следует, что серия  $n = 0$  в (38) выпадает.

**3.4. Решение задачи 1.** В шаре  $B$  любому решению  $(\mu, v)$  задачи 2 при  $\mu > 0$  соответствуют два и только два решения  $(\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^+)$  и  $(-\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^-)$  задачи 1 такие, что  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^+ = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^- = v$ . [42]. Ее обственные значения  $\pm\lambda_{n,m}$  - это корни квадратные из собственных чисел задачи 2.

**3.5. Формулы решений задачи.** Ненулевые собственные значения  $\lambda_{n,m}^\pm$  задачи 1 равны  $\pm\lambda_{n,m} = \pm(\rho_{n,m})/R$ , где  $R$  - радиус шара, а числа  $\rho_{n,m}$  - нули функций  $\psi_n(z)$ . Собственные функции  $u_\kappa^\pm$  задачи 1 в сферических координатах вычисляются по формулам:

$$(40) \quad \begin{aligned} u_\kappa^\pm &= c_\kappa^\pm (\pm\lambda_{n,m}r)^{-1} \psi_n(\pm\lambda_{n,m}r) Y_n^k(\theta, \varphi) \mathbf{i}_r + \\ &c_\kappa^\pm (\pm\lambda_{n,m}r)^{-1} \text{Re}[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)] (\text{Re}HY_n^k \mathbf{i}_\varphi + \text{Im}HY_n^k \mathbf{i}_\theta) + \\ &c_\kappa^\pm (\pm\lambda_{n,m}r)^{-1} \text{Im}[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)] (-\text{Im}HY_n^k \mathbf{i}_\varphi + \text{Re}HY_n^k \mathbf{i}_\theta). \end{aligned}$$

где числа  $c_\kappa^\pm \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $|k| \leq n$ ,  $\kappa = (n, m, k)$ ,  $Y_n^k(\theta, \varphi)$  - сферические функции,  $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\varphi$  - репер,

$$(41) \quad \begin{aligned} \Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r) &= \int_0^r e^{\pm i\lambda_{n,m}(r-t)} \psi_n(\pm\lambda_{n,m}t) t^{-1} dt, \quad \text{Im}\Phi_n(\pm\rho_{n,m}) = 0, \\ \text{H}Y_n^k(\theta, \varphi) &= (\sin^{-1}\theta \partial_\varphi + i\partial_\theta) Y_n^k(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Эти формулы используются при расчетах поля скоростей  $u_\kappa^\pm(x)$  вихревого потока при заданном  $\kappa$ .

Г.Г.Исламов (Удмурдский ГУ, Ижевск), используя программы Wolfram Mathematica рассчитал эти поля при минимальном собственном значении и траектории их линий тока. (см. его доклад в <http://www.wolfram.com/events/technology-conference-ru/2016/resources.html>)

Траектория отдельной точки похожа на нить, которая наматывается на тороидальную катушку, каждая на свою.

В работе [29] также определены собственные функции ротора при минимальном собственном значении и рассчитаны траектории их линий тока.

Идея сведения краевой задачи  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = g$  для системы  $\text{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$  в шаре при  $\lambda \neq 0$  к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца возникла давно [31, 32].<sup>8</sup>

<sup>8</sup>В 1970 А.А.Фурсенко, студент НГУ, в дипломной работе таким способом решил эту задачу в классах Гельдера. Мы выписали формулы

**3.6. Сходимость ряда Фурье по собственным функциям ротора в норме пространства Соболева  $\mathbf{H}^s(B)$ ,  $s \geq 1$ .** Положим

$$\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \cap \mathbf{H}^s(B) : \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S = 0, \dots, \mathbf{n} \cdot \text{rot}^{s-1} \mathbf{f}|_S = 0, \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s} = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s}\}.$$

**Теорема 3.** *Для того, чтобы  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$  разлагалась в ряд Фурье*

$$(42) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa, n > 0} ((\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+) \mathbf{q}_{\kappa}^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^-) \mathbf{q}_{\kappa}^-(\mathbf{x})), \quad \|\mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}\| = 1,$$

*по собственным вектор-функциям  $\mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{x})$  ротора в шаре, сходящийся в норме пространства Соболева  $\mathbf{H}^s(B)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{f}$  принадлежала  $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$ .*

*Если  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$ , то сходится ряд*

$$(43) \quad \sum_{\kappa, n > 0} \lambda_{\kappa}^{2s} (|\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+|^2 + |\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^-|^2), \quad \lambda_{\kappa} = (\rho_{n,m})/R$$

*и существует такая положительная постоянная  $C > 0$ , не зависящая от  $\mathbf{f}$ , что*

$$(44) \quad \sum_{\kappa, n > 0} \lambda_{\kappa}^{2s} (|\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+|^2 + |\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^-|^2) \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(B)}^2.$$

*Если  $s \geq 2$ , то любая вектор-функция  $\mathbf{f}$  из  $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$  разлагается в ряд Фурье, сходящийся в пространстве  $\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})$ .*

Действительно, граница шара  $S \in \mathcal{C}^{\infty}$  и собственные функции  $q_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{x})$ ,  $\text{rot } q_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{x}) = \pm \lambda_{\kappa} q_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{x})$ , первой краевой задачи для оператора ротор в шаре принадлежат классу  $\mathcal{C}^{\infty}$  в  $\overline{B}$ . Значит, они и их конечные линейные комбинации  $\sum_{\kappa} (c_{\kappa}^+ q_{\kappa}^+(\mathbf{x}) + c_{\kappa}^- q_{\kappa}^-(\mathbf{x}))$  принадлежат любому из пространств  $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^l(B)$  при  $l > 0$  и  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\gamma \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{x}) = 0$ , и так далее.

Для следа нормальной компоненты вектор-функции  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^l(B)$  на  $S$  и ее производных  $\gamma \partial^{\alpha} \mathbf{f}$  при  $|\alpha| < l$  имеются оценки (см. [10], § 5.1 главы 3):

$$(45) \quad \|\gamma \mathbf{n} \cdot \partial^{\alpha} \mathbf{f}\|_{L_2(S)} \leq \|\gamma \partial^{\alpha} \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_2(S)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{|\alpha|+1}(B)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^l(B)}.$$

Обозначим через  $\mathbf{S}_N(\mathbf{x})$  частичную сумму ряда (42),  $\mathbf{S}_N(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$  при всех  $N \geq 1$  и  $s \geq 1$ . Рассмотрим разность  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_N(\mathbf{x})$  и воспользуемся оценкой следа на  $S$  ее нормальной компоненты:

$$(46) \quad \|\gamma \mathbf{n} \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{S}_N)\|_{L_2(S)} \leq \|\gamma (\mathbf{f} - \mathbf{S}_N)\|_{\mathbf{L}_2(S)} \leq c \|(\mathbf{f} - \mathbf{S}_N)\|_{\mathbf{H}^1(B)}$$

---

решений задачи, но не опубликовали их. Я опубликовал формулы (40) в 2000 году [35, 36], когда узнал о приложениях и о работе [23].

Если функция  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$  и ряд Фурье (42) сходится в норме  $\mathbf{H}^1(B)$ , то  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_N(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}^1(B)} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Так как  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_N = 0$  при любых  $N$ , то  $\|\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\|_{L_2(S)} = 0$  и, значит,  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = 0$  и  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^1(B)$ .

Если функция  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$  и ряд Фурье (42) сходится в норме  $\mathbf{H}^2(B)$ , то воспользуемся оценкой следа нормальной компоненты ротора:

$$\|\gamma \mathbf{n} \cdot \text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{S}_N)\|_{L_2(S)} \leq \|\gamma \text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{S}_N)\|_{L_2(S)} \leq c\|(\mathbf{f} - \mathbf{S}_N)\|_{\mathbf{H}^2(B)}.$$

Так как  $\gamma \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{S}_N = 0$  при любых  $N$ , то аналогично предыдущему  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = 0$  и  $\gamma \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = 0$ . Значит,  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^2(B)$ .

И так далее, если функция  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$  и ряд Фурье (42) сходится в норме  $\mathbf{H}^s(B)$ , то  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$ , где  $s > 2$ . Необходимость доказана.

Пусть  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$ , где  $s > 0$ . Установим справедливость неравенства (44). Так как  $\text{rot} \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm} = \pm \lambda_{\kappa} \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}$ , согласно формуле Грина имеем

$$(47) \quad \int_B \text{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm} d\mathbf{x} = \pm \lambda_{\kappa} \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm} d\mathbf{x} + \int_S [\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}] \cdot \mathbf{n} dS.$$

Сокращенно эту формулу запишем так

$$(48) \quad (\text{rot} \mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}) = \pm \lambda_{\kappa} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}) + c_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{f}), \quad c_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{f}) = \int_S [\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}] \cdot \mathbf{n} dS.$$

$c_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{f})$ -ограниченный функционал над  $\mathbf{H}^1(B)$ , так как

$$|c_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{f})| \leq \int_S |\mathbf{f}| |\mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}| dS \leq \|\mathbf{f}\|_{L_2(S)} \|\mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}\|_{L_2(S)} \leq \|\mathbf{f}\|_1 \|\mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}\| = \|\mathbf{f}\|_1.$$

Отметим, что  $c_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{f}) = 0$ , если  $\mathbf{f}|_S = 0$  или если  $\mathbf{f} = \mathbf{S}_N$  при  $N < \infty$ .

Обозначим через  $\beta_{\kappa}^{\pm}$  коэффициенты Фурье функции  $\text{rot}^s \mathbf{f}$ . Согласно формуле (48)

$$(49) \quad \beta_{\kappa}^{\pm} = (\text{rot}^s \mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}) = \pm \lambda_{\kappa} (\text{rot}^{s-1} \mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}) + c_{\kappa}^{\pm}(\text{rot}^{s-1} \mathbf{f}) = \dots$$

$$(\pm \lambda_{\kappa})^s (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^{\pm}) + (\pm \lambda_{\kappa})^{s-1} c_{\kappa}^{\pm}(\mathbf{f}) + (\pm \lambda_{\kappa})^{s-2} c_{\kappa}^{\pm}(\text{rot} \mathbf{f}) + \dots + c_{\kappa}^{\pm}(\text{rot}^{s-1} \mathbf{f}).$$

Поскольку  $\text{rot}^s \mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B)$ , то

$$(50) \quad \Sigma_{\kappa} [(\beta_{\kappa}^+)^2 + (\beta_{\kappa}^-)^2] = \|\text{rot}^s \mathbf{f}\|^2.$$

Для финитных вектор-функций из  $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$  имеем

$$(51) \quad \sum_{\kappa, n > 0} \lambda_{\kappa}^{2s} (|\langle \mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+ \rangle|^2 + |\langle \mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^- \rangle|^2) = \|\text{rot}^s \mathbf{f}\|^2 \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(B)}^2.$$

Но финитные вектор-функции  $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(B)$  из  $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$  плотны в  $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$ . Неравенство (44) доказано.



Вернемся к частичной сумме  $\mathbf{S}_l(\mathbf{x})$  ряда (42). Как мы уже отмечали  $\mathbf{S}_l(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$  при всех  $l > 0$ . В частности,  $\operatorname{div} \mathbf{S}_l(\mathbf{x}) = 0$  и  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_l(\mathbf{x}) = 0$ . Поэтому оценка (20) при  $s = 0$  принимает вид

$$(52) \quad C_1 \|\mathbf{S}_l\|_1 \leq \|\operatorname{rot} \mathbf{S}_l\| + \|\mathbf{S}_l\|.$$

Легко видеть, что  $\|\mathbf{S}_l\|^2 \leq c \|\operatorname{rot} \mathbf{S}_l\|^2$ , где  $c = \max_{m,n} \lambda_{m,n}^{-2}$ . Поэтому

$$(53) \quad \|\mathbf{S}_l\|_1^2 \leq a_1 \|\operatorname{rot} \mathbf{S}_l\|^2.$$

По индукции при  $s > 1$

$$(54) \quad \|\mathbf{S}_l\|_s^2 \leq a_s \|\operatorname{rot}^s \mathbf{S}_l\|^2.$$

Пусть  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^s(B)$ , где  $s > 0$ . Согласно неравенству (44), ряды в его левой части сходятся и если  $l > m \geq 1$ , то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_s^2 &\leq a_s \|\operatorname{rot}^s(\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m)\|^2 = \\ &a_s \sum_{m+1}^l \lambda_{\kappa}^{2s} (|(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+)|^2 + |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^-)|^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $l, m \rightarrow \infty$ . Это означает, что ряд (42) сходится к  $\mathbf{f}$  в  $\mathbf{H}^s(B)$ .

При  $s \geq 2$  в трехмерном шаре  $B$  имеется вложение пространств  $\mathbf{H}^s(B) \subset \mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})$  и оценка:

$$(55) \quad \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})} \leq C_s \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(B)}$$

для любой функции  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(B)$ , в которой постоянная  $C_s > 0$  не зависит от  $\mathbf{f}$  (см., например, Теорему 3 § 6.2 в [10]). В частности,

$$(56) \quad \|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})} \leq C_s \|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^s(B)}.$$

Если  $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^s(B)} \rightarrow 0$  при  $l, m \rightarrow \infty$ , то  $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})} \rightarrow 0$ . Это означает, что ряд (42) сходится к  $\mathbf{f}$  в  $\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Любая соленоидальная вектор-функция  $\mathbf{f}$  из  $\mathbf{C}_0^\infty(B)$  разлагается в ряд Фурье (42), сходящийся в пространстве  $\mathbf{C}^\infty(\overline{B})$ .

**3.7. Скалярное произведение функций  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  из  $\mathcal{B}$  в базисе из собственных функций ротора.** Оно имеет вид:

$$(57) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{\kappa, n > 0} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+)(\mathbf{g}, \mathbf{q}_{\kappa}^+) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^-)(\mathbf{g}, \mathbf{q}_{\kappa}^-)].$$

Если  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  принадлежат  $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^1(B)$ , то равенства

$$(58) \quad (\operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{f}, \operatorname{rot} \mathbf{g}) = \sum_{\kappa, n > 0} \lambda_{\kappa} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+)(\mathbf{g}, \mathbf{q}_{\kappa}^+) - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^-)(\mathbf{g}, \mathbf{q}_{\kappa}^-)]$$

показывают, что оператор  $\operatorname{rot}$  является самосопряженным в  $\mathcal{B}$ .

#### 4. ГРАДИЕНТ ДИВЕРГЕНЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

**4.1. Краевая задача:** в ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma$  заданы векторная и скалярная функции  $\mathbf{f}$  и  $g$ , найти вектор-функцию  $\mathbf{u}$ , такую что

$$(59) \quad \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma} = g,$$

При  $\lambda \neq 0$  она является обобщенно эллиптической (см. §2). Действительно, оператор  $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$  второго порядка принадлежит классу (RNS1) (см. п.2.1), так как а) ранг его символической матрицы  $\nabla \operatorname{div}(i\xi)$  постоянный и равен единице, б) оператор  $\nabla \operatorname{div}$  имеет левый аннулятор  $\operatorname{rot}$ :  $\operatorname{rot} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , в) оператор  $\nabla \operatorname{div} // \lambda \operatorname{rot}$  эллиптивен. Поэтому расширенная система:

$$(60) \quad \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \lambda \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{f}$$

является эллиптической системой при выборе порядков:  $s_k = 0$  при  $k = 1, -1, 3$  и  $s_k = -1$  при  $k = 4, -4, 6$ ;  $t_j = 2$  при  $j = 1, -1, 3$ .

Далее, система (60) с краевым условием  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = g$  эллиптична по определению В.А.Солонникова, так как

- 1) Расширенная переопределенная система (60) эллиптична,
- 2) граничный оператор  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  "накрывает" оператор системы (60).

А именно,  $1^0$ ) однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$(61) \quad \lambda \operatorname{rot}(i\xi) \mathbf{w} = 0, \quad (\nabla \operatorname{div})(i\xi) \mathbf{w} = 0, \quad \forall \xi \neq 0$$

с параметром  $\xi \in T'(G)$  имеет только тривиальное решение  $\mathbf{w} = 0$ ;

$2^0$ ) однородная система линейных дифференциальных уравнений:

$$(62) \quad \lambda \operatorname{rot}(i\tau + \mathbf{n}d/dz) \mathbf{v} = 0, \quad (\nabla \operatorname{div})(i\tau + \mathbf{n}d/dz) \mathbf{v} = 0, \quad \forall \tau \neq 0,$$

на полуоси  $z \geq 0$  с краевым условием:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{z=0} = 0$  и условием убывания:  $\mathbf{v}(y, \tau; z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +\infty$ , имеет только тривиальное решение. Здесь  $\tau$  и  $\mathbf{n}$  касательный и нормальный векторы к  $\Gamma$  в точке  $y \in \Gamma$  и  $|\mathbf{n}| = 1$ .

Доказательство этих утверждений <sup>9</sup> почти такое же, как в п.2.1.

Итак, краевая задача (59) при  $\lambda \neq 0$  является обобщенно эллиптической.

---

<sup>9</sup>Ввиду ограничения объема статьи я вынужден опустить это и другие подобные рассуждения. Надеюсь, читатель без труда восстановит их.

**4.2. Оператор задачи (59) в пространствах Соболева.** Пусть  $\mathbf{u}$  принадлежит пространству  $\mathbf{H}^{s+2}(G)$ , то-есть каждая компонента  $u_j \in H^{s+2}(G)$ . Тогда  $\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}$  принадлежит  $\mathbf{H}^s(G)$ , и  $\operatorname{rot}^2 \mathbf{u}$  принадлежит  $\mathbf{H}^s(G)$ . Поэтому вектор-функция  $\mathbf{f} := \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$  принадлежит пространству

$$(63) \quad \mathbf{F}^s(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G) : \operatorname{rot}^2 \mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G)\},$$

которое снабдим нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{F}^s} = (\|\mathbf{v}\|_s^2 + \|\operatorname{rot}^2 \mathbf{v}\|_s^2)^{1/2}.$$

Функция  $g := \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$  принадлежит пространству  $H^{s+3/2}(\Gamma)$ . Следовательно, при  $\lambda \neq 0$  задаче соответствует ограниченный оператор

$$(64) \quad \mathbb{W} \mathbf{u} \equiv \frac{\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}}{\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})} : \mathbf{H}^{s+2}(G) \rightarrow \frac{\mathbf{F}^s(G)}{H^{s+3/2}(\Gamma)}.$$

Согласно Теореме 1.1 в работе Солонникова [15], о переопределенных эллиптических краевых задачах в ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma \in \mathcal{C}^{s+2}$ , обобщенно эллиптический оператор (64) имеет левый регуляризатор, то-есть ограниченный оператор  $\mathbb{W}^L$  такой, что  $\mathbb{W}^L \mathbb{W} = \mathbb{I} + \mathbb{T}$ , где  $\mathbb{I}$  - единичный, а  $\mathbb{T}$  - вполне непрерывный операторы, и существует постоянная  $C_s > 0$  такая, что выполняется априорная оценка:

$$(65) \quad C_s \|\mathbf{u}\|_{s+2} \leq |\lambda| \|\operatorname{rot}^2 \mathbf{u}\|_s + \|\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+3/2} + \|\mathbf{u}\|_s.$$

А также аналогичная оценка в пространствах Соболева  $W_p^{s+2}(G)$ ,  $p > 1$ . Значит, имеет место

**Теорема 4.** *Оператор  $\mathbb{W}$  в пространствах (64) имеет левый регуляризатор. Его ядро  $\mathcal{M}$  конечномерно и выполняется оценка (65).*

Из этой теоремы и оценки следует, что при  $\lambda \neq 0$

- а) число линейно независимых решений однородной задачи (59) конечно,
- б) любое ее обобщенное решение бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.

**4.3. Оператор  $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$  в подпространствах.** На подпространстве  $\mathcal{B}$  в  $\mathbf{L}_2(G)$ , ортогональном подпространству  $\mathcal{A}$ , оператор  $\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$  является оператором умножения:  $\lambda \mathbf{u}$ .

Пространство  $\mathcal{A}_\gamma = \{\mathbf{u} = \nabla h : h \in H^1(G), (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_\Gamma = 0\}$  плотно в  $\mathcal{A}$ , так как функции из  $\mathcal{C}_0^\infty \cap \mathcal{A}_\gamma$  плотны в  $\mathbf{L}_2(G)$ . Пространство

$$(66) \quad \mathcal{A}^2(G) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma : \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma\}.$$

плотно в  $\mathcal{A}_\gamma$  и содержится в  $\mathbf{H}^2(G)$  в силу оценки (65).

Введем оператор  $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}_\gamma$  с областью определения  $\mathcal{A}^2(G)$ , который совпадает с  $\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}$  при  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}^2(G)$ .

Оператор  $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}_\gamma$  является самосопряженным (эрмитовым). Действительно, согласно формуле Гаусса-Остроградского

$$(67) \quad \int_G (\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx = \int_G \mathbf{u} \cdot (\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v}) dx + \int_\Gamma [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{v}]_\Gamma dS.$$

Если вектор-функции  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  принадлежат  $\mathcal{A}^2(G)$ , то граничные интегралы пропадают, остальные интегралы сходятся. Следовательно,

$$(68) \quad ((\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, (\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v})) \quad \text{в } \mathbf{L}_2(G).$$

Область определения  $\mathcal{A}^2(G)$  оператора  $\mathcal{N}_d$  содержится в  $\mathbf{H}^2(G)$  и плотна в  $\mathcal{A}_\gamma$ , а область его значений совпадает с  $\mathcal{A}_\gamma$ .

Так как  $\mathcal{A}_\gamma$  ортогонально  $\operatorname{Ker} \mathcal{N}_d$ , оператор  $\mathcal{N}_d$  имеет единственный обратный  $\mathcal{N}_d^{-1}$  определенный на  $\mathcal{A}_\gamma$ . Оператор  $\mathcal{N}_d^{-1} : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}^2(G)$  имеет точечный спектр, который не содержит точек накопления кроме нуля. Следовательно, спектр самосопряженного оператора  $\mathcal{N}_d$  точечный и действительный, а система его собственных вектор-функций ортогональна и полна в пространстве  $\mathcal{A}_\gamma$ . Каждому собственному значению соответствует конечное число собственных вектор-функций.

Пусть  $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$ , так как  $(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$  то

$$(69) \quad (\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{f} = \sum_{\mu_j \in M} [(\lambda + \mu_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j]$$

и ряд сходится в  $\mathbf{L}_2(G)$ . Если  $\lambda + \mu_{j_0} = 0$ , то соответствующее слагаемое в этом ряду исчезает.

Если элемент  $(\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$ , то

$$(70) \quad (\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} = \sum_{\mu_j \in M} [(\lambda + \mu_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j]$$

и ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что  $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = 0$  при  $-\lambda = \mu_j = \mu_{j_0}$ , то-есть функция  $\mathbf{f}$  ортогональна всем собственным функциям  $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$  градиента дивергенции, отвечающим собственному значению  $\mu_{j_0}$ . Итак, имеет место

**Теорема 5.** *а). Оператор  $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}_\gamma$  является самосопряженным. Его спектр  $\sigma(\mathcal{N}_d)$  точечный и действительный. Семейство собственных функций  $\mathbf{q}_j(x)$  оператора  $\mathcal{N}_d$  образует полный*

ортонормированный базис в пространстве  $\mathcal{A}_\gamma$ ; разложение  $\mathbf{a}(x) \in \mathcal{A}_\gamma(G)$  имеет вид

$$(71) \quad \mathbf{a}(x) = \sum_{\mu_j \in M} (\mathbf{a}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(x), \quad \|\mathbf{q}_j\| = 1.$$

b). Если  $-\lambda$  не совпадает ни с одним из собственных значений оператора  $\mathcal{N}_d$ , то оператор  $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}_\gamma$  однозначно обратим, и его обратный задается формулой (70). Если  $-\lambda = \mu_{j_0}$ , то он обратим тогда и только тогда, когда

$$(72) \quad \int_G \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}_j dx = 0 \quad \text{для } \forall \mathbf{q}_j : \mu_j = \mu_{j_0}.$$

Ядро оператора  $\mathcal{N}_d - \mu_{j_0} I$  определяется собственными функциями  $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ , собственные значения которых равны  $\mu_{j_0}$ :

$$(73) \quad \text{Ker}(\mathcal{N}_d - \mu_{j_0} I) = \sum_{\mu_j = \mu_{j_0}} c_j \mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad \text{для } \forall c_j \in \mathcal{R}.$$

## 5. ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА $\nabla \text{div}$

### 5.1. Связь между собственными функциями операторов $\nabla \text{div}$ и Лапласа-Неймана в ограниченной области.

**Задача 3.** Найти все ненулевые собственные значения  $\mu$  и собственные вектор-функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в  $\mathbf{L}_2(G)$  оператора градиент дивергенции такие, что

$$(74) \quad -\nabla \text{div } \mathbf{u} = \mu \mathbf{u} \quad \text{в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0,$$

где  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  - проекция вектора  $\mathbf{u}$  на нормальный вектор  $\mathbf{n}$ .

К области определения оператора  $\mathcal{N}_d$  задачи 3 отнесем все вектор-функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  класса  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ , которые удовлетворяют граничному условию  $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$  и условию  $\nabla \text{div } \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G)$ .

Эта задача связана со спектральной задачей Неймана для скалярного оператора Лапласа.

**Задача 4.** Найти все собственные значения  $\nu$  и собственные функции  $g(\mathbf{x})$  оператора Лапласа  $-\Delta$  такие, что

$$(75) \quad -\Delta g = \nu g \quad \text{в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla g|_\Gamma = 0.$$

К области определения оператора  $\mathcal{N}_\Delta$  задачи 4 относят все функции  $g(\mathbf{x})$  класса  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ , удовлетворяющие условиям  $\gamma \mathbf{n} \cdot \nabla g = 0$ ,  $\Delta g \in \mathbf{L}_2(G)$ . Эта задача является самосопряженной [7, 10]. Решения задач 3 и 4 принадлежат классу  $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ , так как  $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$ .

Легко убедиться, что

**Лемма 1.** Любому решению  $(\mu, \mathbf{u})$  задачи 3 в области  $G$  соответствует решение  $(\nu, g) = (\mu, \operatorname{div} \mathbf{u})$  задачи 4. Обратно, любому решению  $(\nu, g)$  задачи 4 соответствует решение  $(\mu, \mathbf{u}) = (\nu, \nabla g)$  задачи 3.

### 5.2. Явные решения спектральной задачи Лапласа-Неймана в шаре.

Согласно книге [7] В.С.Владимирова

собственные значения оператора Лапласа-Неймана  $\mathcal{N}_\Delta$  в шаре  $B$  равны  $\nu_{n,m}^2$ , где  $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m} R^{-1}$ ,  $n \geq 0$ ,  $m \in N$ , а числа  $\alpha_{n,m} > 0$  суть нули функций  $\psi'_n(z)$ , производных  $\psi_n(z)$ , т.е.  $\psi'_n(\alpha_{n,m}) = 0$ . Соответствующие  $\nu_{n,m}^2$  собственные функции  $g_\kappa$  имеют вид:

$$(76) \quad g_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) Y_n^k(\theta, \varphi),$$

где  $\kappa = (n, m, k)$ - мультииндекс,  $c_\kappa$ -произвольные действительные постоянные,  $Y_n^k(\theta, \varphi)$  - действительные сферические функции,  $n \geq 0$ ,  $|k| \leq n$ ,  $m \in N$ .

Функции  $g_\kappa(x)$  принадлежат классу  $C^\infty(\overline{B})$  и при различных  $\kappa$  ортогональны в  $L_2(B)$ . Система функций  $\{g_\kappa\}$  полна в  $L_2(B)$  [10]. Нормируя их, получим ортонормированный в  $L_2(B)$  базис.

### 5.3. Решение спектральной задачи 3 для $\nabla \operatorname{div}$ в шаре.

Согласно лемме 3 вектор-функции  $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla g_\kappa(x)$  являются решениями задачи 3 при  $\mu_{n,m} = \alpha_{n,m}^2 R^{-2}$  в  $\mathbf{L}_2(B)$ . Их компоненты  $(q_r, q_\theta, q_\varphi)$  имеют вид

$$(77) \quad \begin{aligned} q_{r,\kappa}(r, \theta, \varphi) &= c_\kappa (\alpha_{n,m}/R) \psi'_n(\alpha_{n,m} r/R) Y_n^k(\theta, \varphi), \\ (q_\varphi + i q_\theta)_\kappa &= c_\kappa (1/r) \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) \operatorname{NY}_n^k(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

При  $\kappa = (0, m, 0)$  функция  $Y_0^0(\theta, \varphi) = 1$ ,  $\operatorname{NY}_0^0 = 0$ . Поэтому

$$(78) \quad \begin{aligned} q_{r,(0,m,0)}(r) &= c_{(0,m,0)} (\alpha_{0,m}/R) \psi'_0(\alpha_{0,m} r/R), \\ (q_\varphi + i q_\theta)_{(0,m,0)} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что  $\mathbf{q}_\kappa$  и  $\mathbf{q}_{\kappa'}$  ортогональны при  $\kappa' \neq \kappa$ .

Действительно, используя формулу Гаусса-Остроградского и свойства этих векторов имеем

$$(79) \quad \int_B \mathbf{q}_{\kappa'} \cdot \mathbf{q}_\kappa dx = \frac{\alpha_{n,m}^2}{R^2} \int_B g_{\kappa'} g_\kappa dx.$$

Но функции  $g_\kappa(x)$  и  $g_{\kappa'}(x)$  взаимно ортогональны в  $L_2(B)$ . Значит, вектор - функции  $\mathbf{q}_\kappa$  и  $\mathbf{q}_{\kappa'}$  также взаимно ортогональны в  $\mathbf{L}_2(B)$  и  $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = (\alpha_{n,m}/R) \|g_\kappa(x)\|$ .

**5.4. Решение спектральной задачи 1 для ротора при  $\lambda = 0$  в шаре.** Числа  $\mu_{n,m} = \alpha_{n,m}^2 R^{-2} > 0$  при любых  $n \geq 0, m \in N$ . Поэтому вектор-функции  $\mathbf{q}_\kappa$  являются также решениями задачи 1 при  $\lambda = 0$ .

**5.5. Сходимость ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа-Неймана в норме пространства Соболева.** В § 2.5 главы 4 книги В.П.Михайлова [10] для областей  $G$  с границей  $\Gamma \in C^s$  определены подпространства  $H_{\mathcal{N}}^s(G)$  в  $H^s(G)$ :

$$(80) \quad H_{\mathcal{N}}^s(G) = \{f \in H^s(B) : (\mathbf{n} \cdot \nabla)f|_S = 0, \dots, (\mathbf{n} \cdot \nabla)\Delta^\sigma f|_S = 0\},$$

где  $\sigma$  равна целой части  $[s/2 - 1]$  числа  $s/2 - 1, s \geq 2$ , и  $H_{\mathcal{N}}^0(G) = L_2(G), H_{\mathcal{N}}^1(G) = H^1(G)$  по определению. Доказано, что принадлежность  $f$  пространству  $H_{\mathcal{N}}^s(G)$  необходима и достаточна для сходимости ее ряда Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа-Неймана в  $H^s(G)$  (см. теоремы 8 и 9 § 2.5 гл. 4).

**5.6. Сходимость ряда (81) в норме пространства Соболева  $H^s(B)$ .** Определим подпространство  $\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^s(B)$  в  $\mathcal{A}$  при  $s \geq 1$ :

$$\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^s(B) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A} \cap \mathbf{H}^s(B) : \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S = 0, \dots, \mathbf{n} \cdot (\nabla \operatorname{div})^\sigma \mathbf{f}|_S = 0, \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^s} = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s}\},$$

где  $\sigma = [(s - 1)/2] + 1$ . Имеет место

**Теорема 6.** *Для того, чтобы  $\mathbf{f} \in \mathcal{A}$  разлагалась в ряд Фурье*

$$(81) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa) \mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$$

*по системе собственных вектор-функций  $\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$  оператора градиента дивергенции в шаре, сходящийся в норме пространства Соболева  $\mathbf{H}^s(B)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{f}$  принадлежала  $\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^s(B)$ .*

*Если  $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_{\mathcal{K}}^s(B)$ , то сходится ряд*

$$(82) \quad \sum_{\kappa} \nu_{\kappa}^{2s} |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)|^2, \quad \nu_{\kappa} = (\alpha_{n,m})/R$$

*и существует такая положительная постоянная  $C > 0$ , не зависящая от  $\mathbf{f}$ , что*

$$(83) \quad \sum_{\kappa} \nu_{\kappa}^{2s} |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)|^2 \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(B)}^2.$$

*Если  $s \geq 2$ , то любая вектор-функция  $\mathbf{f}$  из  $\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^s(B)$  разлагается в ряд Фурье, сходящийся в пространстве  $\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})$ .*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 3 для оператора ротор.

**Следствие.** Любая вектор-функция  $f$  из  $\mathcal{A} \cap C_0^\infty(B)$  разлагается в ряд Фурье (81), сходящийся в пространстве  $C^\infty(\overline{B})$ .

**5.7. Скалярное произведение функций  $f$  и  $g$  из  $\mathcal{A}_\gamma$  в базисе из собственных функций градиента дивергенции.** Оно имеет вид:

$$(84) \quad (f, g) = \sum_{\kappa, n \geq 0} (f, q_\kappa)(g, q_\kappa)$$

Если  $f$  и  $g$  принадлежат  $\mathbf{A}_\kappa^1(B)$ , то равенства

$$(85) \quad (\nabla \operatorname{div} f, g) = (f, \nabla \operatorname{div} g) = \sum_{\kappa, n \geq 0} \nu_\kappa^2 [(f, q_\kappa)(g, q_\kappa)]$$

показывают, что оператор  $\nabla \operatorname{div}$  является самосопряженным в  $\mathcal{A}_\gamma$ .

## 6. БАЗИСНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В $\mathbf{L}_2(G)$

**6.1. Пространства  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  в  $\mathbf{L}_2(G)$ .** В §1 мы рассмотрели ортогональные подпространства  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}_H$  и  $\mathbf{V}^0$ . Пространства  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}_H$  принадлежат ядру оператора ротор; а в  $\mathbf{V}^0$  он продолжается как самосопряженный оператор  $S$ , собственные функции которого образуют базис в  $\mathbf{V}^0$ .

Пространство  $\mathcal{B}$  принадлежит ядру оператора градиент дивергенции; а в  $\mathcal{A}_\gamma$  он продолжается как самосопряженный оператор  $\mathcal{N}_d$ , собственные функции которого образуют базис в  $\mathcal{A}_\gamma \subset \mathcal{A}$ .

$\mathcal{B}_H$  — конечномерное пространство.

Согласно (1) и (3) пространство  $\mathbf{L}_2(G)$  разлагается на ортогональные подпространства:

$$(86) \quad \mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_H \oplus \mathbf{V}^0(G).$$

Следовательно, имеет место

**Теорема 7.** Система  $\{q_j(x)\} \cup \{h_j(x)\} \cup \{q_j^+(x)\} \cup \{q_j^-(x)\}$  решенный задачи 1 образует в пространстве  $\mathbf{L}_2(G)$  ортонормированный базис. Любую вектор-функцию  $f(x)$  из  $\mathbf{L}_2(G)$  можно разложить в ряд Фурье по этому базису:

$$f(x) = \sum_{\mu_j \in M} (f, q_j) q_j(x) + \sum_{j=1}^{\rho} (f, h_j) h_j(x) + \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(f, q_j^+) q_j^+ + (f, q_j^-) q_j^-].$$

В случае шара пространство  $\mathcal{B}_H$  пусто.



6.2. **Разложение векторного поля**  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B)$ . на безвихревое поле  $\mathbf{a}_f$  и соленоидальное поле  $\mathbf{b}_f$ :  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_f(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_f(\mathbf{x})$ , где

$$(87) \quad \mathbf{a}_f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^n (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa) \mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa = (n, m, k)$$

$$(88) \quad \mathbf{b}_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^n [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^+) \mathbf{q}_\kappa^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^-) \mathbf{q}_\kappa^-(\mathbf{x})].$$

Частичные суммы  $\mathbf{S}_N^0$  и  $\mathbf{S}_N^1$  рядов (87) и (88) состоят из элементов с индексами  $n, m, k$ , для которых  $0 < \alpha_{n,m} < N$  и  $0 < \rho_{n,m} < N$ , соответственно.

Имеет место равенство Парсеваля-Стеклова:  $\|\mathbf{f}\|^2 = \|\mathbf{a}_f\|^2 + \|\mathbf{b}_f\|^2$ , которое запишем так

$$(89) \quad \|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{(n,m) \in \mathbb{P}_N} \sum_{k \in [-n,n]} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^-)^2],$$

где решетка  $\mathbb{P}_N = \{(n, m) : 0 < \rho_{n,m} < N, 0 < \alpha_{n,m} < N\}$  и векторы  $\mathbf{q}_{0,m,0}^\pm = 0$ .

Отметим, что разложение векторного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  на безвихревое поле  $\nabla h(\mathbf{x})$  и соленоидальное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  связано с решением задачи Неймана

$$(90) \quad \triangle h = \operatorname{div} \mathbf{f} \quad \text{в } B, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla h|_S = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S,$$

в классической или обобщенной постановках (см.[4, 13]).

Мы сводим решение задачи к вычислению интегралов  $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)$ ,  $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^+)$ ,  $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^-)$  и ее решение получаем в виде рядов (87), (88).

## 7. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ 5 В ШАРЕ

Методом Фурье легко решается краевая

**Задача 5.** Пусть задана вектор-функция  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(B)$ . Найти вектор-функцию  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в  $\mathbf{H}^1(B)$  такую, что

$$(91) \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в } B, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

7.1. **Основные пространства.** Через  $\mathbf{E}^s(B)$  обозначают [21] пространство

$$\mathbf{E}^s(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(B) : \operatorname{div} \mathbf{v} \in H^s(B), \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^s}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{H^s}^2)^{1/2}\},$$

где число  $s \geq 0$  целое. Оно является пространством Гильберта и

$$(92) \quad \mathbf{C}_0^\infty(B) \subset \mathbf{E}^s(B), \quad \mathbf{H}^{s+1}(B) \subset \mathbf{E}^s(B) \subset \mathbf{H}^s(B).$$

Согласно п. 2.2,  $\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} \in \mathbf{E}^s(B)$ , если  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(B)$ .

Как известно [10], для функций  $v$  из пространства  $H^1(B)$  определен оператор *следа*  $\gamma : H^1(B) \rightarrow H^{1/2}(S)$ , равный следу  $v$  на  $S$  для гладких функций из  $C^1(\overline{B})$ :  $\gamma v = v|_S$ , причем  $\|\gamma v\|_{L_2(S)} \leq c\|v\|_{H^1(B)}$ .

Аналогично, для вектор-функций  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  из  $\mathbf{E}^0(B)$  определен [21] оператор *следа нормальной компоненты*  $\gamma_{\mathbf{n}} : \mathbf{E}^0(B) \rightarrow H^{-1/2}(S)$ , равный сужению  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  на  $S$  для функций из  $C^1(\overline{B})$ :  $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S$ .

Для  $u \in \mathbf{E}^0(B)$  и  $v \in H^1(B)$  верна обобщенная формула Стокса:  $\langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \gamma v \rangle = (\mathbf{u}, \nabla v) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, v)$  где  $\langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \gamma v \rangle$ - линейный функционал над  $H^{1/2}(S)$ ;  $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \in H^{-1/2}(S)$  при  $\gamma v \in H^{1/2}(S)$ . Имеют место непрерывные вложения:  $H^{1/2}(S) \subset L_2(S) \subset H^{-1/2}(S)$

Пространство  $\mathbf{E}_{\gamma}^s(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{E}^s(B) : \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S = 0\}$ ,  $s \geq 0$ .

## 7.2. Решение краевой задачи (91) при $\lambda \neq Sp(\operatorname{rot})$ .

**Теорема 8.** Если  $\lambda \neq 0, \pm \lambda_{n,m}$ ,  $n, m \in \mathbf{N}$  и  $\mathbf{f} \in \mathbf{E}_{\gamma}^0(B)$ , то единственное решение  $\mathbf{u}$  задачи 5 дается суммой рядов  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ , где

$$(93) \quad \mathbf{u}_1 = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^n (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}) \mathbf{q}_{\kappa}(\mathbf{x}), \quad \kappa = (n, m, k),$$

$$(94) \quad \mathbf{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left[ \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^+)}{\lambda + \lambda_{n,m}} \mathbf{q}_{\kappa}^+(\mathbf{x}) + \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{\kappa}^-)}{\lambda - \lambda_{n,m}} \mathbf{q}_{\kappa}^-(\mathbf{x}) \right].$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева  $\mathbf{H}_{\gamma}^1(B)$ .

Если  $\mathbf{f} \in \mathcal{A} \subset \mathbf{L}_2(B)$ , то  $\mathbf{u} = \lambda^{-1} \mathbf{f}$  отображает  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{A}$ .

Если  $\mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}$  в  $\mathbf{L}_2(B)$ , то  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$  принадлежит  $\mathbf{W}^1(B) \subset \mathbf{H}_{\gamma}^1(B)$ .

Если же  $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(B)$ , то ряды (93), (94) сходятся в любом из пространств  $\mathbf{H}^s(B)$ ,  $s \geq 1$  и их сумма есть классическое решение задачи класса  $C^{\infty}(\overline{B})$ .

Доказательство приведено в [42].

Мы не будем выписывать подробно решение задачи 6 при  $\lambda = 0$ . Отметим только, что условие  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$  необходимо и достаточно для ее разрешимости, а однородная задача имеет счетное число линейно независимых решений  $\mathbf{q}_{\kappa}(\mathbf{x})$ .

При  $\lambda = \pm \lambda_{n,m}$  задача (91) разрешима по Фредгольму.

Задача:  $\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{f}$  в  $B$ ,  $\gamma_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$  решается аналогично.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sobolev, S.L. 1992 *Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction* Gordon and Breach, Montex
- [2] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики. Известия АН СССР серия математическая 18(1954) 3-50

- [3] Соболев С.И. *Sur un probleme limite pour les equations polyharmoniques*. Rec.Math.Moscou n.Ser. 2(44) No.3 465-499 (1937) Zbl 0018.02603
- [4] Ladyzhenskaya, O.A. 1969 *Mathematical Theory of Viscous Incompressible flow* Gordon and Breach, New York
- [5] Ладыженская О.А. *О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей* Записки Науч. семинаров ПОМИ, 2003, т. 306, pp. 71 -85
- [6] H.Weyl *The method of orthogonal projection in potetial theory* // Duke Math. V.7, 1941, 411-444.
- [7] Vladimirov, V.S. 1971 *Equations of Mathematical Physics* Marcel Dekker, New York
- [8] Fridrichs, K. *Differertial form on Riemannian manifolds* Comm. Pure Appl. Math., VIII, № 2, Nov.1955.
- [9] Kozlov, V.V. 1998 *General Vortex Theory* Izhevsk:Udmurd.Univ.
- [10] Mikhailov, V.P. 1978 *Partial Differential Equations* Moscow: Mir
- [11] В.А. Зорич, *Математический анализ Часть II* М. Наука 1984. 640 с.
- [12] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика, ч. II, Гостехиздат, 1948*
- [13] Bykhovski, E.B., Smirnov, N.V. 1960 *About orthogonal decomposition of Spaces  $L_2(\Omega)$  and operators of the vector analysis* Proceeding of Steclov MI LIX. Mathematical questions of the hidrodymamics and magnit hydrodymamics for a viscous incompressible fluids Moskow, Leningrad: Academy Sci. of USSR p.5-36
- [14] Vainberg, B.R., Grushin, V.V. 1967 *Uniformly nonelliptic problems I* Math.USSR-Sb. v.2(1),111-133.
- [15] Solonnikov, V.A. 1971 *Overdeterminate elliptic Problems* Leningrad:Notes of the Sci. seminar of LOMI vol.21, no. 5, p. 112-158
- [16] Агранович М.С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей*. М.: МЦНМО, 2013, 365 с.
- [17] Арнольд В.И. *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits*. C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. 261. P. 17-20
- [18] М. Henon *Sur la topologie des lignes de courant dans un case particulier*. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1966. 262. P. 312-314. 7.
- [19] A.Fursikov *Local existence theorems with unboundet set of input data and unboundeness of stable invariant manifolds for 3D Navier-Stokes equations* AIMS' Journal v.3, is.2, pp. 269-289, 2010.
- [20] Bourguignon J.P , Brezis H. *Remarks on the Euler equation*. J. Funct. Anal. v. 15, pp. 341-363 (1974)
- [21] Temam, R.I. 1979 *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis* North-Holland, Amsterdam
- [22] J. B. Taylor *Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields* // Phys. Rev. Letters. 1974. V. 33. P. 1139-1141.
- [23] S. Chandrasekhar, P.S. Kendall *On force-free magnetic fields* // Astrophys. Journal.1957. V. 126. P. 457-460.
- [24] D. Montgomery, L. Turner, G. Vahala *Three-dimentional magnetohydrodynamic turbulence in cylindrical geometry*// Phys. Fluids. 1978. V. 21. No 5. P. 757-764.

- [25] Берхин П.Е. Самосопряженная краевая задача для системы  $*d u + \lambda u = f$  // ДАН. 1975. Т. 222, № 1. С. 15-17.
- [26] Z.Yoshida and Y.Giga, *Remark on spectra of operator rot.* // Math. Z. 1990. V. 204. P. 235-245.
- [27] R.Picard *On selfadjoint realization of curl and some its applications.* // Preprint : Technische Universitat Dresden: MATH-AN-02-96). Dresden, Marz 1996.
- [28] Н.Филонов *Спектральный анализ самосопряженного оператора rot в области конечной меры.* Алгебра и анализ, 1999, т.11, вып.6, с.178-230.
- [29] J.Cantarella, D.DeTurck, H.Gluck, M.Teitel *The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains* // Physics of plasmas. 2000, Vol.7, No.7, pp.2766-2775
- [30] Borchers W., Sohr H. *The equations  $\operatorname{div} u = f$  and  $\operatorname{rot} v = g$  with zero boundary conditions.* Hokkaido Math. J. v.19, pp. 67-87, 1990
- [31] Сакс Р.С. *On the boundary value problems for the systems  $\operatorname{curl} u + \lambda u = h$ ,* Soviet Math. Doklady 12 (1971), N.4, 1240-1244.
- [32] Сакс Р.С. *On the boundary value problems for the systems  $\operatorname{curl} u + \lambda u = h$ ,* Differential Equations 8 (1972), N.1. p. 126-140.
- [33] Saks, R.S. 1975 *Boundary Value Problems for Elliptic Systems of Differential Equations* Novosibirsk: Gos. Univ. 165p.
- [34] Сакс Р.С. *О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях* // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 28 (Записки научн. Семинаров ПОМИ, Т. 243). 1997. С.-П. С. 215-269.//
- [35] Сакс Р.С. *Спектр оператора вихря в шаре при условии непротекания и собственные значения колебаний упругого шара, закрепленного на границе* // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. IV. Прикладная математика. Труды международной конференции. Уфа ИМ с ВЦ УНЦ РАН 2000, 61-68.
- [36] R.S.Saks *On spectrum of the curl operator* Progresses in Analysis and its applications, Proceeding of the Intern. ISAAC Congress (Berlin Aug. 20-25 2001), 1, World Scientific, 2003, 811-819
- [37] Сакс Р.С. *Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиям* // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 36 (Записки научн. Семинаров ПОМИ, т. 318). 2004. С.-П. С. 246-276.//
- [38] Saks, R.S. 2010 *Global solutions of the Navier-Stokes equations in uniformly rotating space* Theor. Math.Phys. v.162, No.2 p. 163-178
- [39] Сакс Р.С., Хайбуллин А.Г., Об одном методе численного решения задачи Коши для уравнений Навье-Стокса и рядах Фурье оператора ротор «Доклады Академии Наук». 2009. Т. 429, №1, С. 22-27.
- [40] Saks, R.S. 2011 *Cauchy Problem for the Navier-Stokes equations, Fourier method* Ufim. Math. Zh., v.3 No.1, p. 53-79
- [41] Сакс Р.С. *Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса.* Доклады Акад. Наук. 2007. Т. 416, No 4, С. 446-450.
- [42] Saks, R.S. 2013 *Solving of Spectal Problems for the curl and Stokes operators* Ufim. Math. Zh., v.5 No.2, p. 63-81

Реферат:

Ряды Фурье оператора ротор и пространства Соболева.

Р.С.Сакс

Автор изучает свойства операторов ротор и градиент дивергенции в произвольной ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\Gamma$ , их спектральные разложения и краевые задачи.

В пространстве  $\mathbf{L}_2(G)$  выделяются ортогональные подпространства  $\mathbf{V}^0(G)$  и  $\mathcal{A}_\gamma(G)$ . Доказано, что существуют продолжения  $S$  и  $\mathcal{N}_d$  операторов ротор и градиент дивергенции в эти пространства такие, что  $S$  и  $\mathcal{N}_d$  являются самосопряженными и имеют вполне непрерывные обратные  $S^{-1}$  и  $\mathcal{N}_d^{-1}$ . Откуда вытекает ортогональность собственных функций каждого из этих операторов в соответствующих подпространствах и полнота совокупной системы в их объединении.

Найдены необходимые и достаточные условия на  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(B)$  и  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma(B)$ , при которых их ряды Фурье сходятся в норме пространства Соболева  $\mathbf{H}^s(B)$ .

При  $\lambda \neq 0$  исследована разрешимость в  $\mathbf{H}^s(G)$  краевых задач для систем  $\mathbf{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$  в  $G$  и  $\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$  в  $G$  с условием  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g$  на границе.

Методом Фурье при любых  $\lambda$  решена краевая задача для системы  $\mathbf{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$  в шаре  $B$  с условием  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0$ .

Fourier series of the curl operator and Sobolev spaces

Saks Romen Semenovich

Сакс Ромэн Семенович ведущий научный сотрудник Институт Математики с ВЦ УНЦ РАН 450077, г. Уфа, ул. Чернышевского, д.112 телефон: (347) 272-59-36 (347) 273-34-12 факс: (347) 272-59-36 телефон дом.: (347) 273-84-69 моб. +79173797538

e-mail: romen-saks@yandex.ru